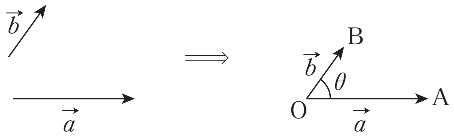
第 3 講　ベクトルの内積

PART1 ベクトルの内積

要点 ① ベクトルのなす角

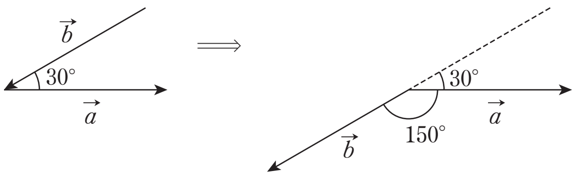
$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，点 O を始点として，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ となるような点 A，B をとる。このとき，



∠AOB の大きさ θ を，2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の「　　　」という。ただし，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

例　右の図において $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角は

　　である。



要点 ② ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が θ のとき

「　　　　　　」

を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の「　　」といい，「　　　」で表す。

ベクトルの内積

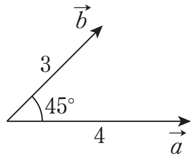
$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

$\vec{a}=\vec{0}$ または $\vec{b}=\vec{0}$ のときは，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ と定める。

例　$|\vec{a}|=4$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 45° のとき

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 45^\circ=4\times3\times\cos 45^\circ=4\times3\times\frac{1}{\sqrt{2}}=6\sqrt{2}$$



※内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ は，ベクトルではなく実数である。また，内積の記号「・」は省略できない。

要点 ③ ベクトルの垂直と内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ の符号は，$\cos\theta$ の符号と一致するから

$0^\circ \leqq \theta < 90^\circ$ のとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\theta = 90^\circ$ のとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}$

$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ のとき　$\vec{a}\cdot\vec{b}$

$\theta=90^\circ$，すなわち 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角が 90° のとき，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は「　　」であるといい，$\vec{a}$　$\vec{b}$ と書く。よって，次のことが成り立つ。

ベクトルの垂直と内積

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

※ $\theta=0^\circ$ のとき　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は同じ向きに平行であり，$\cos\theta=1$

　$\theta=180^\circ$ のとき　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ は反対向きに平行であり，$\cos\theta=-1$

　であるから，$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき，次のことが成り立つ。

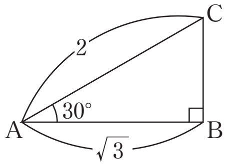
$$\vec{a}\,/\!/\,\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}| \quad \text{または} \quad \vec{a}\cdot\vec{b}=-|\vec{a}||\vec{b}|$$

1 右の図において，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$



Point Pickup

ベクトルの内積

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

2 つのベクトルの始点を揃え，なす角 θ を考える。また，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である。

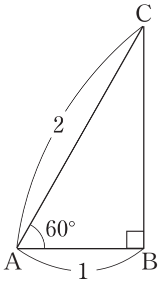
ベクトルの垂直と内積

$\vec{a}\neq\vec{0}$，$\vec{b}\neq\vec{0}$ のとき

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

第3講 PART1 確認問題

右の図において，次の内積を求めよ。



1 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=$ ア

2 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}=$ イウ

3 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=$ エ

第 3 講　ベクトルの内積

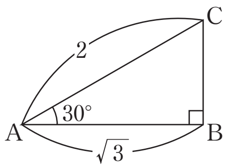
PART1 ベクトルの内積

1 右の図において，次の内積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$



[解答]

$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=1$

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 30^\circ=\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=3$

(2) $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{BC}|\cos 120^\circ=2\times 1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-1$

(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 90^\circ=\sqrt{3}\times 1\times 0=0$

第 3 講 PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：1

[解説]

$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AC}$ のなす角は，$\angle BAC = 60^\circ$ であるから

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 60^\circ$$ [A]

$$= 1\times 2\times\frac{1}{2} = \mathbf{1}$$

[A] $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

2

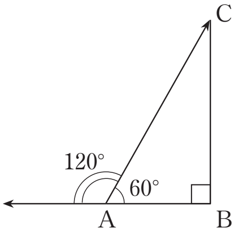
[正解] イウ：-1

[解説]

$\overrightarrow{AC}$ と $\overrightarrow{BA}$ のなす角は

$$180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

したがって



$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BA}$$ [B]

$$= |\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{BA}|\cos 120^\circ$$

$$= 2\times 1\times\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$= \mathbf{-1}$$

[B] $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
2 つのベクトルの始点を揃え，なす角 θ を考える。また，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である。

3

[正解] エ：0

[解説]

$$BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{3}$$

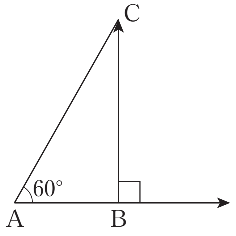
$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{BC}$ のなす角は 90° であるから

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$$ [C]

$$= |\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 90^\circ$$

$$= 1\times\sqrt{3}\times 0$$

$$= \mathbf{0}$$ [D]



[C] $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると
$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
2 つのベクトルの始点を揃え，なす角 θ を考える。また，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である。

[D] $\vec{a} \neq \vec{0}$，$\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき
$\vec{a} \perp \vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b} = 0$